Cálculo Combinatório

Exercício

O valor da expressão:

$$^{1999}C_{100} + {}^{1999}C_{101}$$

é igual a: (Assinala a opção correta.)

(A) $^{2000}C_{101}$

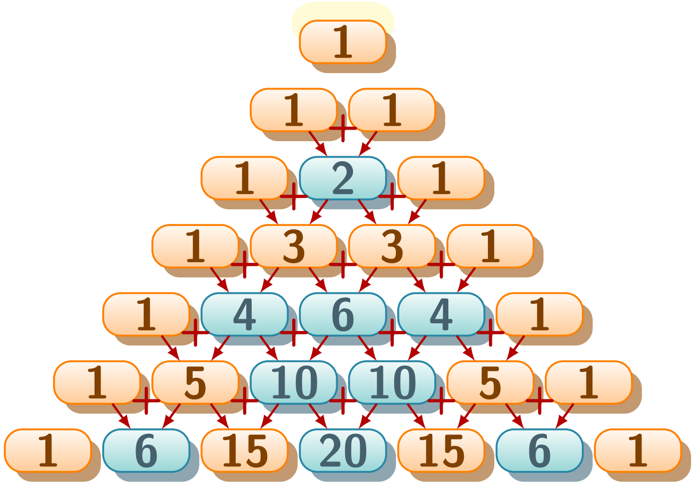
(B) $^{1998}C_{100}$

(C) $^{1999}C_{201}$

(D) $^{2000}C_{201}$

Resolução:

Adicionando dois números consecutivos de uma linha do triângulo de Pascal,



$$\vdots$$

obtemos o número que, na linha seguinte, ocupa a posição entre aqueles dois.

Como exemplo podemos dizer que:
$10 = 4 + 6$ $(10 - \textit{linha}\ 5;\ 4\ e\ 6 - \ \textit{linha}\ 4)$.

Ou seja,

$$^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1} \tag{1}$$

sendo n o número de linhas e p o número de colunas dessa linha e $0 \leq p < n$, $p \in N_0$, $n \in N$.

Portanto, sendo $n = 1999$ e $p = 100$,

verificamos que,

$^{1999+1}C_{100+1} = {}^{2000}C_{101}$.

Opção (A), $^{2000}C_{101}$.

Demonstração da propriedade (1):

Recorda que: ${}^nC_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$${}^nC_p + {}^nC_{p+1} =$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)![n-(p+1)]!} =$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{n!}{(p+1)p!(n-p-1))!} =$$

$$= \frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(p+1)p!(n-p)(n-p-1)!} =$$

$$= \frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!(\cancel{p}+1+n-\cancel{p})}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$= {}^{n+1}C_{p+1} \ \blacksquare$$